

蒋逢灵, 刘贤群, 刘沅明. 混沌系统动力学特性分析及有限时间同步控制[J]. 智能计算机与应用, 2024, 14(9): 145-149.
DOI: 10.20169/j.issn.2095-2163.240923

混沌系统动力学特性分析及有限时间同步控制

蒋逢灵^{1,2}, 刘贤群¹, 刘沅明¹

(1 湖南铁路科技职业技术学院 铁道供电与电气学院, 湖南 株洲 412006;

2 湖南省高铁运行安全保障工程技术研究中心, 湖南 株洲 412006)

摘要: 混沌系统同步控制收敛速度是衡量系统同步控制的重要指标, 本文提出分数阶超混沌 Chen 系统的有限时间同步, 能有效控制系统同步的收敛性。基于 Lyapunov 稳定性理论, 研究了分数阶 Chen 超混沌系统动力学特性及其有限时间同步控制。首先, 通过其指数的计算证实了系统是超混沌系统, 通过计算分数阶超混沌系统的平衡点和特征值验证了系统的稳定性; 其次, 结合混沌系统的主从控制技术以及有限时间同步理论, 通过设置合适的控制函数, 将混沌系统的同步控制转换为系统误差系统的控制; 再次, 通过引理和定理的理论分析, 从理论上证实了分数阶超混沌系统在有限时间内可以实现同步。最后, 数值仿真结果与理论分析完全相吻合, 系统大约在 2.2 s 左右实现同步并且具有很好的收敛性。

关键词: 分数阶超混沌系统; Lyapunov 函数; 动力学行为; 稳定性; 有限时间同步

中图分类号: TP391.9; O415.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 2095-2163(2024)09-0145-05

Analysis of dynamic characteristics of chaotic systems and finite time synchronous control

JIANG Fengling^{1,2}, LIU Xianqun¹, LIU Yuanming¹

(1 School of Railway Power Supply and Electrical Engineering, Hunan Vocational College of Railway Technology, Zhuzhou 412006, Hunan, China; 2 Hunan Highspeed Railway Engineering and Technology Research Center for Operating Safety, Zhuzhou 412006, Hunan, China)

Abstract: The convergence speed of chaotic system synchronization control is an important indicator for measuring system synchronization control. This paper proposes finite time synchronization of fractional order hyper chaotic Chen system, which can effectively control the convergence of system synchronization. Based on Lyapunov stability theory, the dynamic characteristics and finite time synchronization control of fractional order Chen hyperchaotic systems were studied. Firstly, the calculation of its index confirms that the system is a hyper chaotic system, and the stability of the system is verified by calculating the equilibrium point and eigenvalues of the fractional order hyper chaotic system; Secondly, by combining the master-slave control technology of chaotic systems and finite time synchronization theory, by setting appropriate control functions, the synchronization control of chaotic systems can be transformed into the control of system error systems; Again, through theoretical analysis of lemmas and theorems, it is theoretically confirmed that fractional order hyperchaotic systems can achieve synchronization within a finite time. Finally, the numerical simulation results are in complete agreement with the theoretical analysis, and the system achieves synchronization in approximately 2.2 seconds with good convergence.

Key words: fractional-order hyperchaotic system; Lyapunov function; dynamic behavior; stability; finite-time synchronizing

0 引言

混沌系统是复杂的非线性系统, 具有非周期、随机性、类噪声以及对初值极度敏感等特性^[1]。随着研究的深入, 人们发现混沌系统几乎存在自然界中的各个领域。美国气象专家在研究大气湍流时发现

了混沌系统, 即“蝴蝶效应”, 使得人们对混沌系统的特征有了更深刻的认识与理解。研究者们以整数阶混沌系统为基础, 研究了分数阶超混沌系统, 发现分数阶超混沌系统比低维混沌系统产生的混沌序列密钥空间宽广, 表现出更加复杂的动力学特性, 在安全通信^[2]、图像加密^[3]、加密算法^[4]等工程方面具

基金项目: 湖南省自然科学基金(2022JJ60009)。

作者简介: 蒋逢灵(1982-), 男, 硕士, 副教授, 主要研究方向: 混沌理论及应用。Email: 158364038@qq.com

收稿日期: 2024-05-15

哈尔滨工业大学主办 ◆ 专题设计与应用

有非常广泛的应用。混沌系统对初值极度敏感,即便两个非常相近的状态,输入初始值微小的变化都会引起输出的巨大差异,甚至在演变的过程中分化成两个完全不同的状态,使得混沌控制面临极大的挑战,但是研究者们从未停止对混沌控制的研究。自从 Pecora 等^[5]提出混沌同步控制的思想,通过实验电路实现了混沌系统的同步控制,激发了学者们对混沌系统同步控制研究的热情^[6-8]。毛北行等^[9]通过构造滑膜函数域控制器,实现了分数阶永磁电机混沌系统的自适应滑膜同步控制。董武等^[10]设计了一个三维系统的额电路,通过采用非线性反馈同步法与线性反馈控制方法实现系统的同步控制。随着混沌同步控制深入研究,相继提出自适应同步^[11]、滑膜同步^[12]、广义同步^[13]等控制方法。这些同步方法为混沌同步控制研究拓宽了思路,其工程应用领域也相继扩大到混沌激光^[14]、混沌语音加密^[15]等其它高尖端技术工程领域中。

混沌系统同步控制收敛速度是衡量系统同步控制的重要指标,学者们根据系统之间同步收敛时间的不同,提出了渐近同步和有限时间同步的控制思想。这两种同步控制思想都是基于主从控制技术,渐近同步控制是系统在无限长的时间内误差系统收敛于零,这种控制方式适合于控制精度不高,粗犷的工程领域中应用,不利于时间精度要求高的控制领域。随着人们对混沌系统的理解与研究,以及工程领域高精度的要求,需要收敛性速度更快、收敛性更好的控制方法,于是提出了有限时间同步控制的方法,这种控制方式能够在有限的时间内使系统趋于稳定,更加符合工程领域的需求。

本文基于 Lyapunov 稳定性理论,以分数阶 Chen 超混沌系统为对象,研究了系统的稳定性和动力学特性,结合主从控制技术,利用有限时间同步控制思想,通过设计合适的控制函数实现了分数阶超混沌系统之间的有限时间同步控制,数值仿真结果与理论分析完全吻合。

1 分数阶微分概述

分数阶微积分有很多版本的定义,这里采用著名的 Caputo^[16]定义如下:

$$D_*^\alpha x(t) = J^{n-\alpha} x^{(n)}(t), \alpha > 0 \quad (1)$$

其中, n 为 $n \geq \alpha$ 的第一个整数, $J^{n-\alpha}$ 是阶数为 $n - \alpha$ 阶的 Riemann-Liouville 积分算子,其积分算子表达式如下:

$$J^\beta y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \quad (2)$$

其中, β 为积分算子的阶数 ($0 < \beta \leq 1$), $\Gamma(\beta)$ 是 Gamma 函数。

假设分数阶混沌系统为

$$D_t^q X_1 = F(X_1) \quad (3)$$

其中, $X_1 \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$, $F(X_1) = (F(X_1), F(X_2), \dots, F(X_n))^T$, $0 < q \leq 1$ 。

系统式(3)经过初始值 x_0 在相空间形成轨迹 $x(t)$, 假定初始存在的偏差为 Δx_0 , 则系统变量变成 $x_0 + \Delta x_0$, 将以此变量产生另外的运行轨迹, 构成另外的相空间量 $\Delta x_0(x_0, t)$, 系统的范数为 $\|\Delta x_0(x_0, t)\|$ 。

令 $\omega x_0(x_0, t) = \Delta x_0(x_0, t)$, 满足

$$\frac{d\omega}{dt} = M(x, t)\omega \quad (4)$$

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}$$

那么, n 维系统 Lyapunov 指数则定义为

$$\lambda(x_0, \Delta x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\|\Delta x_0(x_0, t)\|}{\|\Delta x_0(x_0, 0)\|}, \quad (5)$$

$$\|\Delta x_0(x_0, 0)\| \rightarrow 0$$

根据指数判定, 当系统含有两个以上正的 Lyapunov 指数, 则系统就是超混沌系统。

引理 1^[17] 系统式(3)是渐近稳定的, 当且仅当对等式(3)的雅克比矩阵的任意特征值 λ , 都满足 $|\arg(\lambda)| = q\pi/2$ 成立。那么, 当 $q > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{|\operatorname{Im}(\lambda)|}{\operatorname{Re}(\lambda)}\right)$ 时, 系统式(3)是混沌的。

引理 2^[18]

$$D^q x^u = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u+1-q)} x^{u-q} D^q x \quad (6)$$

引理 3^[19] 假设函数 $f(t) \in C_\alpha^\alpha([a, b])$, $D_a^\alpha f(t) \in C_\alpha^\beta([a, b])$, 其中 $\alpha, \beta > 0$ 且 $m-1 < \beta < m$, $n-1 < \alpha < n$, 则有

$$D_a^\beta(D_a^\alpha f(t)) = D_a^{\alpha+\beta} f(t) \quad (7)$$

引理 4^[20] 当任意实数满足 $a, b > 0$ 且 $0 < c < 1$ 时, 可得

$$(a+b)^c \leq a^c + b^c \quad (8)$$

引理 5^[21] 假设函数 $x(t) \in R$ 连续可导, 则对于任意时间常数 $t \geq t_0$, 则有

$$\frac{1}{2} D^q(x^T(t)x(t)) \leq x^T(t) D^q(x(t)) \quad (9)$$

其中, $0 < q < 1$ 。

定理 1 考虑导分数阶系统^[22]

$$D_t^q x(t) = f(x, t) \tag{10}$$

假设满足

$$x^T D_t^q x \leq -\rho(x^T x)^\lambda \tag{11}$$

那么系统式(10)是有限时间稳定的,且在有限

时间 $t \leq \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+q-\lambda)2\rho} \|x(0)\|^\frac{1}{\lambda}$ 内系统会区域同步。

其中, $0 < q < 1, \rho, \lambda$ 都是任意的正常数,并且满足 $0 < \lambda < \frac{q+q^2}{2}$ 。

2 分数阶 Chen 超混沌系统的描述

分数阶 Chen 超混沌系统的数学表达式为:

$$\begin{cases} D^q x_1 = a(y_1 - x_1) + w_1 \\ D^q y_1 = bx_1 - x_1z_1 + cy_1 \\ D^q z_1 = x_1y_1 - dz_1 \\ D^q w_1 = y_1z_1 + rw_1 \end{cases} \tag{12}$$

其中, q 为阶数 ($0 < q < 1$), $a = 35, b = 7, c = 12, d = 3, r = 0.5$ 。

通过计算系统式(12)的 Lyapunov 指数,得到指数曲线如图 1 所示。图 1 中可见 3 个正指数,根据指数判定该系统是超混沌系统。

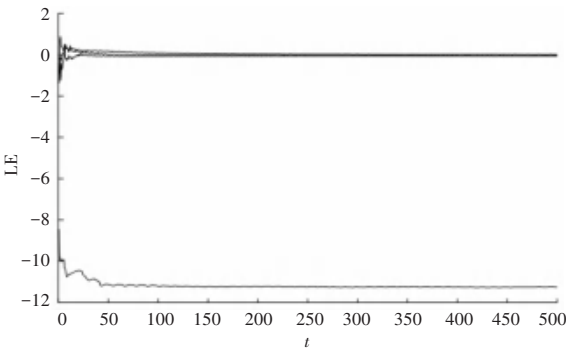


图 1 Lyapunov 指数曲线图
Fig. 1 Lyapunov exponent curve

根据引理 1,令系统式(12)右边等于 0,得到系统的 5 个平衡点。

$$\begin{aligned} S_0 &= (0, 0, 0, 0) \\ S_1 &= (-82.0531 - 284.8306i, -6.6181 - 1.2245i, -4.2737 + 6.9135i, 12.2500 - 13.5069i) \\ S_2 &= (-82.0531 + 284.8306i, -6.6181 + 1.2245i, -4.2737 - 6.9135i, 12.2500 + 13.5069i) \\ S_3 &= (82.0531 - 284.8306i, 6.6181 - 1.2245i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4.2737 + 6.9135i, 12.2500 + 13.5069i) \\ S_4 &= (82.0531 + 284.8306i, 6.6181 + 1.2245i, \\ &4.2737 - 6.9135i, 12.2500 - 13.5069i) \end{aligned}$$

则相应的雅克比矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix} \tag{13}$$

根据式(13)计算得到各平衡点相应的特征值。

$$\begin{aligned} S_0 \text{ 处: } &\lambda_1 = -39.7356, \lambda_2 = 16.7356, \lambda_3 = -3.0000, \lambda_4 = 0.5000 \\ S_1 \text{ 处: } &\lambda_1 = 289.93 - 82.25i, \lambda_2 = -280.64 + 81.49i, \lambda_3 = -35.29 + 0.77i, \lambda_4 = 0.50 - 0.01i \\ S_2 \text{ 处: } &\lambda_1 = 289.93 + 82.25i, \lambda_2 = -280.64 - 81.49i, \lambda_3 = -35.29 - 0.77i, \lambda_4 = 0.50 + 0.01i \\ S_3 \text{ 处: } &\lambda_1 = 289.93 + 82.25i, \lambda_2 = -280.64 - 81.49i, \lambda_3 = -35.29 - 0.77i, \lambda_4 = 0.50 \\ S_4 \text{ 处: } &\lambda_1 = 289.93 - 82.25i, \lambda_2 = -280.64 + 81.49i, \lambda_3 = -35.29 + 0.77i, \lambda_4 = 0.50 \end{aligned}$$

由引理 1 判定条件,只要满足 $\alpha > 2\pi \arctan(82.25/289.93) \approx 0.18$, 即 $1 < \alpha < 0.181$, 则系统式(12)是渐渐稳定的,其分数阶超混沌吸引子如图 2 所示。

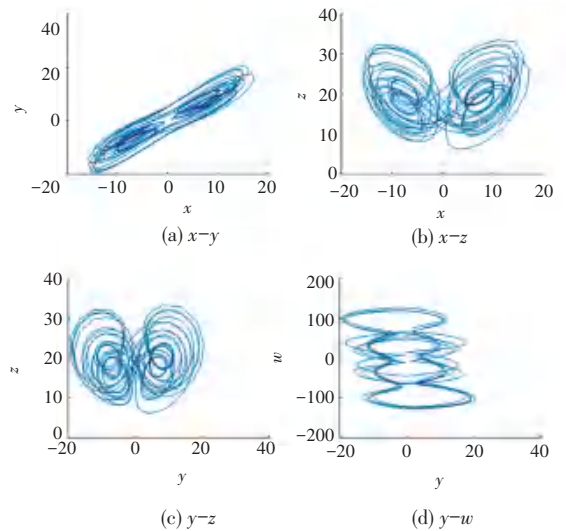


图 2 分数阶 Chen 超混沌吸引子
Fig. 2 Fractional order Chen hyperchaotic attractor

3 分数阶超混沌系统有限时间同步控制

以分数阶式(12)为驱动系统,通过在驱动系统表达式中每项中设置合适的控制函数 $U(t)$, 得到其响应系统表示为:

$$\begin{cases} \dot{D}^q x_2 = a(y_2 - x_2) + w_2 + u_1 \\ \dot{D}^q y_2 = bx_2 - x_2 z_2 + cy_2 + u_2 \\ \dot{D}^q z_2 = x_2 y_2 - dz_2 + u_3 \\ \dot{D}^q w_2 = y_2 z_2 + rw_2 + u_4 \end{cases} \quad (14)$$

其中, $u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$ 是控制函数。

定义误差系统为

$$e(t) = y(t) - x(t) \quad (15)$$

那么,在分数阶混沌系统初始值取一定值的情况下,要使得驱动系统(12)和响应系统(14)同步,只需满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \|y(t) - x(t)\| = 0$, 则系统(12)与系统(14)将在有限的时间内实现同步。

定义误差为 $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1, e_4 = w_2 - w_1$, 则由式(14)减去式(12),得同步误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{D}^q e_1 = a(e_2 - e_1) + e_4 + u_1 \\ \dot{D}^q e_2 = (b - z)e_1 + ce_2 + x'e_3 + u_2 \\ \dot{D}^q e_3 = -de_3 + xe_2 + (y + e_2)e_1 + u_3 \\ \dot{D}^q e_4 = re_4 + ze_2 - y'e_3 + u_4 \end{cases} \quad (16)$$

对同步误差系统中的控制函数 $U(t)$ 有限时间控制器的设计,使得驱动-响应系统达到同步状态,即在构造函数的作用下,使得误差系统(16)在有限时间内趋于0,从而实现驱动-响应系统的有限时间同步。这里构造控制函数为:

$$\begin{cases} u_1 = -ae_1 - \rho e_1^\omega \\ u_2 = -b(e_1 + e_2) + z_1 e_1 - ce_2 - x_2 e_3 - \rho e_2^\omega \\ u_3 = -x_2 e_2 - (y_2 + e_2)e_1 - \rho e_3^\omega \\ u_4 = -2re_4 - z_2 e_2 + e_3 - \rho e_4^\omega \end{cases} \quad (17)$$

将式(17)带入式(16),得到同步误差动态方程为:

$$\begin{cases} \dot{D}^q e_1 = -ae_1 - \rho e_1^\omega \\ \dot{D}^q e_2 = -be_2 - \rho e_2^\omega \\ \dot{D}^q e_3 = -de_3 - \rho e_3^\omega \\ \dot{D}^q e_4 = -re_4 - \rho e_4^\omega \end{cases} \quad (18)$$

因此,就可以将分析驱动-响应系统的同步控制问题,转换成分析误差系统是否向0点收敛的问题。根据定理1的条件,即在构造控制函数(17)的作用下,由驱动系统(12)和响应系统(14)构成的误差系统(16),从任意初始值出发,都会在有限时间内趋于0点,则实现有限时间同步。

证明 选取 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T(t)e(t) \quad (19)$$

根据引理5可得

$$D^q V(t) \leq e^T D^q e \quad (20)$$

再根据上式可得

$$\begin{aligned} e^T D^q e &= [e_1 e_2 e_3 e_4]^T D^q [e_1 e_2 e_3 e_4] = e_1(-ae_1 - \rho e_1^\omega) + e_2(-be_2 - \rho e_2^\omega) + e_3(-de_3 - \rho e_3^\omega) + e_4(-re_4 - \rho e_4^\omega) \\ &= -ae_1^2 - \rho e_1 e_1^\omega - be_2^2 - \rho e_2 e_2^\omega - de_3^2 - \rho e_3 e_3^\omega - re_4^2 - \rho e_4 e_4^\omega \leq -\rho e_1 e_1^\omega - \rho e_2 e_2^\omega - \rho e_3 e_3^\omega - \rho e_4 e_4^\omega = -\rho(e_1^2)^{\frac{1+\omega}{2}} - \rho(e_2^2)^{\frac{1+\omega}{2}} - \rho(e_3^2)^{\frac{1+\omega}{2}} - \rho(e_4^2)^{\frac{1+\omega}{2}} \end{aligned} \quad (21)$$

由引理3得

$$\begin{aligned} -\rho(e_1^2)^{\frac{1+\omega}{2}} - \rho(e_2^2)^{\frac{1+\omega}{2}} - \rho(e_3^2)^{\frac{1+\omega}{2}} - \rho(e_4^2)^{\frac{1+\omega}{2}} &\leq \\ -\rho(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)^{\frac{1+\omega}{2}} &\quad (22) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} e^T D^q e &= [e_1 e_2 e_3 e_4]^T D^q [e_1 e_2 e_3 e_4] \leq \\ &-\rho(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)^{\frac{1+\omega}{2}} = \\ &-\rho([e_1 e_2 e_3 e_4]^T [e_1 e_2 e_3 e_4])^{\frac{1+\omega}{2}} = \\ &-\rho(e^T e)^{\frac{1+\omega}{2}} \end{aligned} \quad (23)$$

将参数表达式带入到定理的有限时间公式中,可以得到

$$t \leq \frac{\hat{e}^T \hat{e} (e^T e)^{\frac{1+\omega}{2}}}{\hat{e}^T \hat{e} (e^T e)^{\frac{1+\omega}{2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{1+\omega}{2}) \Gamma(1+q)}{\Gamma(1+q - \frac{1+\omega}{2}) 2\rho}} \hat{e}^{\frac{1}{q}} \quad (24)$$

其中, $\lambda = (1 + \omega)/2$ 。

可以看出,误差系统通过构造合适的控制器函数,在有限的时间 t 内是收敛的,并且是稳定的,既验证了系统在有限的时间内可以实现同步。

为了验证方案的可行性,对误差系统进行数值仿真分析。取系统参数 $a = 35, b = 7, c = 12, d = 3$ 和 $r = 0.5, \rho = 2, \omega = 0.5, \alpha = 0.96$; 驱动系统式(12)的初始值为 $x_1(0) = 10, y_1(0) = 10, z_1(0) = 10, w_1(0) = 10$; 响应系统式(14)的初始值为 $x_2(0) = -10, y_2(0) = -10, z_2(0) = -10, w_2(0) = -10$ 。其仿真结果的误差系统曲线如图3所示。

由图3可知,通过构造控制函数式,证实了在有限的时间内误差 $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 和 $e_4(t)$ 均收敛于0并且是稳定的,即系统(12)与系统(14)在有限时间内实现了同步,其各个状态变量随时间的同步曲线如图4~图7所示。将参数带入式(24),通过定理1计算结果可得系统的有限同步时间 $t \leq 2.2$ s。

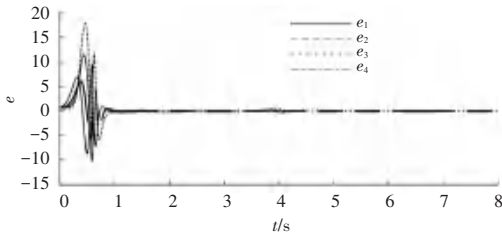
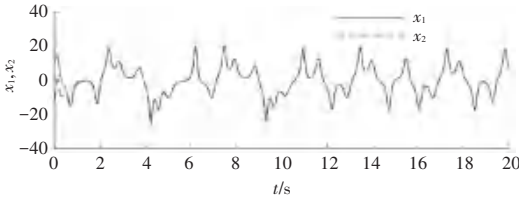
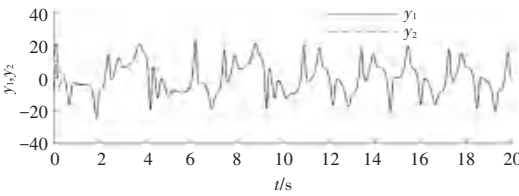
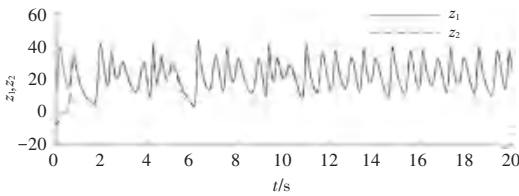
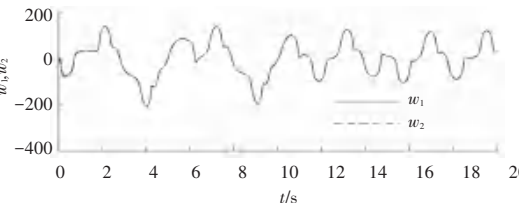


图3 误差曲线

Fig. 3 Error-curve

图4 x_1, x_2 同步曲线Fig. 4 x_1, x_2 synchronous curve图5 y_1, y_2 同步曲线Fig. 5 y_1, y_2 synchronous curve图6 z_1, z_2 同步曲线Fig. 6 z_1, z_2 synchronous curve图7 w_1, w_2 同步曲线Fig. 7 w_1, w_2 synchronous curve

4 结束语

分数阶超混沌系统比低维混沌系统具有更加复杂的动力学特性,在工程领域很多应用到同步技术。基于 Lyapunov 稳定性理论,研究了分数阶超混沌系统的稳定性和动力学特性,并且结合主从控制技术,利用有限时间同步控制思想,通过设计合适的控制函数,实现了分数阶超混沌系统之间的有限时间同步控制。本方法仍需进一步优化,特别是针对同步时间要求比较高的同步控制应用,该方案可能难以

满足要求。对于有限时间同步在铁路安全通信中的应用,有限时间同步时间与铁路通信时间戳就会存在时间差异问题等,都是混沌同步控制需要进一步研究与解决的问题。

参考文献

- [1] 梁万用,赵凯辉,江泳,等. 基于混沌系统和动态约瑟夫环的语音加密算法[J]. 复杂系统与复杂性科学,2024,1(31):1-9.
- [2] 蒋逢灵,刘贤群,邓景新,等. 分数阶混沌系统同步及其在保密通信中的应用[J]. 长江信息通信,2023,36(11):58-62.
- [3] 妥永强,巫朝霞. 基于改进 3D-Hénon 混沌映射的音频加密算法研究[J]. 智能计算机与应用,2022,12(3):53-60.
- [4] 王梦生,孙先赫,马宏斌. DNA 运算与超混沌系统新型图像加密算法[J]. 智能计算机与应用,2023,13(5):90-97.
- [5] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic system[J]. Physical Review Letters,1990,64(8):821-824.
- [6] 陈宁,蔡茂国. 不同结构的超混沌系统的自适应滑模同步[J]. 智能计算机与应用,2020,10(9):12-16.
- [7] REMERO M, MANOSO C. Fractional generalized predictive control strategy with fractional constraints handling [J]. IEEE Access,2022,10:128779-128789.
- [8] TRIKHA P, JAHANZAIB L S, NASREEN, et al. Dynamical analysis and triple compound combination antisynchronization of novel fractional chaotic system [J]. Journal of Vibration and Control,2022,28(9-10):1057-1073.
- [9] 毛北行,王东晓. 分数阶永磁同步电机混沌系统自适应滑模同步[J]. 浙江大学学报(理学版),2023,50(5):564-569.
- [10] 董武,王聪,张宏立,等. 异构超混沌系统有限时间组合-组合同步及应用[J]. 系统仿真学报,2023,35(7):1590-1601.
- [11] 颜闽秀,郭栋. 具有共存吸引子混沌系统的自适应同步控制[J]. 控制工程,2024,31(6):995-1003.
- [12] 李惠,郑柏超,吴跃文,等. Delta 算子框架下混沌系统的鲁棒滑模同步控制[J]. 光电与控制,2022,29(7):37-42,68.
- [13] 陈莉,张丽丽,雷友发. 含未知结构的多重连接网络的渐近广义同步[J]. 仲恺农业工程学院学报,2023,36(2):31-38.
- [14] 伍玉山,王俊丽,毛晓鑫,等. 单跨光纤长距离混沌激光保真传输实验研究[J]. 中国激光,2023,50(5):115-123.
- [15] 徐丽云,闫涛,钱宇华. 基于级联混沌系统的分数域语音加密算法[J]. 计算机应用,2021,41(9):2623-2630.
- [16] 闫少辉,施万林,宋震龙,等. 一个新三维混沌电路设计及其同步控制[J]. 计算机工程与科学,2022,44(8):1409-1417.
- [17] ATANGANA A. On the new fractional derivative and application to nonlinear Fisher's reaction - diffusion equation [J]. Applied Mathematics and Computation,2016,15(273):948-956.
- [18] MATIGNON D. Stability results of fractional differential equations with applications to control processing [C]//Proceedings of TMACE-SMC. IEEE,1996:963-968.
- [19] LI Changpin, DENG Weihua. Remarks on fractional derivatives[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 187(2):777-784.
- [20] 胡建兵,肖建,赵灵冬. 阶次不等的分数阶混沌系统同步[J]. 物理学报,2011,60(11):181-184.
- [21] OUANNAS A, ODIBAT Z, HAYAT T. Fractional analysis of co-existence of some types of chaos synchronization [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 105: 215-223.
- [22] 郑广超,刘崇新,王琰. 一种具有隐藏吸引子的分数阶混沌系统的动力学分析及有限时间同步[J]. 物理学报,2018,67(5):43-50.