

文章编号: 2095-2163(2019)06-0184-05

中图分类号: TP391.9;TB115

文献标志码: A

性能曲线仿真检验方法

傅惠民, 文歆磊

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘要:性能曲线是衡量产品质量和可靠性的重要指标,随着数字化设计和智能制造的快速发展,对基于数字化的产品性能曲线仿真需求越来越迫切,但是产品性能曲线仿真的可信性问题一直困扰着人们。本文提出一种性能曲线仿真检验方法,分别给出正态分布情况下性能曲线特征参数均值和协方差的仿真拒绝域,并针对非正态分布甚至分布形式未知的情况,建立性能曲线两步仿真检验法。该方法通过分析性能曲线仿真结果与试验结果之间的误差是由仿真不正确引起的系统误差,还是由其分散性引起的偶然误差,进而判断性能曲线仿真正确与否。大量计算表明,该方法计算简单,便于工程应用。

关键词:性能曲线; 仿真检验; 可信性; 两步仿真法; 数字化设计; 智能制造

Test method for performance curve simulation

FU Huimin, WEN Xinlei

(Research Center of Small Sample Technology, Beihang University, Beijing, 100191, China)

【Abstract】 Performance curve is a significant index to evaluate the quality and reliability of products, and the demand for performance curve simulation based on digitalization is increasing with the rapid development of digital designing and intelligent manufacturing. To settle the credibility issue of simulation, a test method for performance curve simulation is proposed, in which rejection regions for mean vector and covariance matrix of characteristic parameters depicting the curve are given respectively for the normal distribution circumstance, and a two-step simulation test method is further presented for the non-normal or even unknown distribution circumstance. By analyzing the error between the simulated and experimental performance curves, the constructed methodology can distinguish the system error caused by incorrect simulation from the random error caused by dispersity, and then determine whether the performance curve simulation is correct or not. A large amount of computational results show that, this test method is easy to calculate and convenient for engineering application.

【Key words】 performance curve; simulation test; credibility; two-step simulation method; digital designing; intelligent manufacturing

0 引言

随着数字化设计和智能制造的发展,仿真的应用已越来越广泛,基于数字化的产品性能曲线仿真也成为当前研究热点^[1-2]。但是,仿真系统是否正确可信一直困扰着人们,如何对仿真系统进行校核、验证和确认(Verification, Validation and Accreditation, VV&A)至关重要^[3-4]。在整个 VV&A 过程中,最关键的环节是通过建立科学合理的检验方法,判断仿真系统与实际系统是否一致。为此,文献[5-7]提出静态仿真结果检验和分析方法,文献[8-10]提出动态一致性仿真检验方法。本文进一步建立一种性能曲线仿真检验方法,通过性能曲线的特征参数是否被正确仿真进行检验,分别给出了正态分布和非正态分

布的仿真拒绝域,从而能够对仿真结果与试验结果之间的误差进行分析,确定该误差是系统误差还是偶然误差,进而判断仿真是否正确。大量工程实例计算和 Monte Carlo 模拟验证表明,本文方法能实现性能曲线小样本仿真检验,很好地解决了上述问题。

1 线性性能曲线仿真检验方法

大量工程实践表明,许多性能曲线表现为线性过程,或者经过适当变换后呈现出线性形式^[11],即可表示为:

$$y = A + Bx, \quad (1)$$

式中, A 和 B 是待定参数,均为随机变量。令 $\mathbf{Z} = (A, B)^T$, 则 \mathbf{Z} 为二元随机变量,其均值和协方差分别为:

基金项目: 2018 年智能制造综合标准化项目《基于数字仿真的机械产品可靠性测试方法标准研究与试验验证》;国家重点基础研究发展计划(2012CB720000)。

作者简介: 傅惠民(1956-),男,博士,“长江学者”特聘教授,主要研究方向:小样本信息技术、信号分析与处理、数据融合方法、可靠性及估计理论研究等。

收稿日期: 2019-08-10

$$E(\mathbf{Z}) = E[(A, B)^T] = \boldsymbol{\mu}, \quad (2)$$

$$\text{Var}(\mathbf{Z}) = \text{Var}[(A, B)^T] = \boldsymbol{\Sigma}. \quad (3)$$

设 $\mathbf{Z} = (A, B)^T$ 的仿真结果 $\mathbf{Z}' = (A', B')^T$ 的均值和协方差分别为:

$$E(\mathbf{Z}') = E[(A', B')^T] = \boldsymbol{\mu}', \quad (4)$$

$$\text{Var}(\mathbf{Z}') = \text{Var}[(A', B')^T] = \boldsymbol{\Sigma}', \quad (5)$$

若仿真结果正确, 有:

$$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \boldsymbol{\Sigma}. \quad (7)$$

1.1 正态分布情况

当 $\mathbf{Z} = (A, B)^T$ 及其仿真结果 $\mathbf{Z}' = (A', B')^T$ 均服从多元正态分布时, 为了检验仿真结果 $\boldsymbol{\mu}'$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}'$ 是否满足式(6)和式(7), 对 n 个试样开展相互独立的试验, 得到 n 个实测曲线特征参数值 $\mathbf{Z}_1 = (a_1, b_1)^T, \mathbf{Z}_2 = (a_2, b_2)^T, \dots, \mathbf{Z}_n = (a_n, b_n)^T$. 同时, 基于仿真得到 m 个仿真曲线特征参数值 $\mathbf{Z}'_1 = (a'_1, b'_1)^T, \mathbf{Z}'_2 = (a'_2, b'_2)^T, \dots, \mathbf{Z}'_m = (a'_m, b'_m)^T$.

1.1.1 均值向量仿真结果检验

当协方差阵仿真正确时, 有 $\boldsymbol{\Sigma}' = \boldsymbol{\Sigma}$, 则协方差阵的最佳无偏估计为:

$$\mathbf{S} = \frac{(n-1)\mathbf{S}_1 + (m-1)\mathbf{S}_2}{m+n-2}, \quad (8)$$

式中:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i, \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{Z}}' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{Z}'_i, \quad (10)$$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Z}_i - \bar{\mathbf{Z}})(\mathbf{Z}_i - \bar{\mathbf{Z}})^T, \quad (11)$$

$$\mathbf{S}_2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\mathbf{Z}'_i - \bar{\mathbf{Z}}')(\mathbf{Z}'_i - \bar{\mathbf{Z}}')^T, \quad (12)$$

当 $n = 1$ 时, 令式(11)中的 $\mathbf{S}_1 = \mathbf{0}$.

计算统计量 T :

$$T = \sqrt{\frac{mn}{m+n} (\bar{\mathbf{Z}} - \bar{\mathbf{Z}}')^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{Z}} - \bar{\mathbf{Z}}')}, \quad (13)$$

则根据多元统计分析理论^[12]可以证明, 在显著性水平 α 下, 式(6)的拒绝域为:

$$T \geq \sqrt{\frac{k(m+n-2)}{m+n-k-1} F_{\alpha}(k, m+n-k-1)}. \quad (14)$$

由于 \mathbf{Z} 为二元随机变量, 所以 $k = 2$. 当式(14)成立时, 可以断定性能曲线特征参数的均值向量未能正确仿真, 即拒绝式(6).

1.1.2 协方差阵仿真结果检验

为检验性能曲线特征参数的协方差阵是否被正

确仿真, 构造如下检验统计量:

$$M = (m+n-2) \ln |\mathbf{S}| - (n-1) \ln |\mathbf{S}_1| - (m-1) \ln |\mathbf{S}_2|, \quad (15)$$

式中, \mathbf{S}, \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 仍由式(8)~式(12)计算, $n \geq 2$.

根据多元统计分析理论^[12]可以证明, 当式(7)

成立时, 统计量 M 近似服从 $\frac{\chi^2[k(k+1)/2]}{(1-d_1)}$ 分布,

其中:

$$d_1 = \begin{cases} \frac{2k^2 + 3k - 1}{6(k+1)} \left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m+n-2} \right) & m \neq n \\ \frac{2k^2 + 3k - 1}{4(k+1)(m+n-1)} & m = n \end{cases}. \quad (16)$$

因此, 在显著性水平 α 下, 式(7)的拒绝域为:

$$M \geq \frac{\chi^2_{\alpha}[k(k+1)/2]}{(1-d_1)}. \quad (17)$$

当式(17)成立时, 可以断定性能曲线特征参数的协方差阵未能正确仿真, 即拒绝式(7).

1.2 非正态分布情况

在实际应用中, 经常遇到 $\mathbf{Z} = (A, B)^T$ 及其仿真结果 $\mathbf{Z}' = (A', B')^T$ 不为正态分布甚至分布形式未知的情况, 此时不能按照 1.1 节方法对仿真结果进行检验. 设 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 分别为实测曲线特征参数的均值向量和协方差阵, $\boldsymbol{\mu}'$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}'$ 分别为仿真曲线特征参数的均值向量和协方差阵. 若仿真正确, 仍有式(6)和式(7)成立. 由于 $\mathbf{Z} = (A, B)^T$ 和 $\mathbf{Z}' = (A', B')^T$ 为非正态分布, 所以检验统计量的分布形式未知, 需按照下面给出的两步仿真法进行检验.

1.2.1 均值向量仿真结果两步仿真检验

在性能曲线特征参数的协方差阵仿真正确的条件下, 首先给出均值向量仿真结果检验的两步仿真法, 具体步骤如下:

(1) 根据 n 个实测曲线特征参数值, 由式(9)和式(11)计算实测样本的均值 $\bar{\mathbf{Z}}$ 和协方差阵 \mathbf{S}_1 .

(2) 开展第一步仿真, 得到 m 个仿真曲线特征参数值, 由式(10)和式(12)分别计算仿真结果的均值 $\bar{\mathbf{Z}}'$ 和协方差阵 \mathbf{S}_2 .

(3) 由式(8)计算组合协方差阵 \mathbf{S} , 再将 $\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{Z}}'$ 和 \mathbf{S} 代入式(13)计算检验统计量 T .

(4) 进行第二步仿真, 得到 n 个仿真曲线特征参数值 $\mathbf{Z}'_1 = (a'_1, b'_1)^T, \mathbf{Z}'_2 = (a'_2, b'_2)^T, \dots, \mathbf{Z}'_n = (a'_n, b'_n)^T$.

(5)由下式计算检验统计量 T^*

$$T^* = \sqrt{\frac{mn}{m+n} (\bar{\mathbf{Z}}^* - \bar{\mathbf{Z}}')^T (\mathbf{S}^*)^{-1} (\bar{\mathbf{Z}}^* - \bar{\mathbf{Z}}')}, \quad (18)$$

式中:

$$\bar{\mathbf{Z}}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i^*, \quad (19)$$

$$\mathbf{S}_1^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Z}_i^* - \bar{\mathbf{Z}}^*) (\mathbf{Z}_i^* - \bar{\mathbf{Z}}^*)^T, \quad (20)$$

$$\mathbf{S}^* = \frac{(n-1)\mathbf{S}_1^* + (m-1)\mathbf{S}_2}{m+n-2}, \quad (21)$$

当 $n=1$ 时,令式(20)中的 $\mathbf{S}_1^* = \mathbf{0}$ 。

(6)比较 T^* 和 T 的大小,观察下式是否成立

$$T^* \geq T. \quad (22)$$

(7)重复步骤(4)~步骤(6)。设共重复 N_f 次,其中满足式(22)的有 n_f 次。对于给定的显著性水平 α ,若

$$\alpha_f^* = n_f / N_f \leq \alpha \quad (23)$$

成立,则可以断定性能曲线特征参数的均值向量未能正确仿真,即拒绝式(6)。

1.2.2 协方差阵仿真结果两步仿真检验

采用两步仿真法对协方差阵仿真结果进行检验的具体步骤如下:

(1)根据 n 个 ($n \geq 2$) 实测曲线特征参数值,由式(11)计算出实测结果的协方差阵 \mathbf{S}_1 。

(2)开展第一步仿真,得到 m 个仿真曲线特征参数值,由式(12)计算出仿真结果的协方差阵 \mathbf{S}_2 。

(3)由式(8)计算组合协方差阵 \mathbf{S} ,再将 \mathbf{S}, \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 代入式(15)计算检验统计量 M 。

(4)进行第二步仿真,得到 n 个仿真曲线特征参数值 $\mathbf{Z}_1^* = (a_1^*, b_1^*)^T, \mathbf{Z}_2^* = (a_2^*, b_2^*)^T, \dots, \mathbf{Z}_n^* = (a_n^*, b_n^*)^T$ 。

(5)由下式计算检验统计量 M^*

$$M^* = (m+n-2) \ln |\mathbf{S}^*| - (n-1) \ln |\mathbf{S}_1^*| - (m-1) \ln |\mathbf{S}_2|, \quad (24)$$

式中, \mathbf{S}_1^* 和 \mathbf{S}^* 仍由式(19)~式(21)计算。

(6)比较 M^* 和 M 的大小,观察下式是否成立

$$M^* \geq M. \quad (25)$$

(7)重复步骤(4)~步骤(6)。设共重复 N_f 次,其中满足式(25)的有 n_f 次。对于给定的显著性水平 α ,若

$$\alpha_f^* = n_f / N_f \leq \alpha \quad (26)$$

成立,则可以断定性能曲线特征参数的协方差阵未

能正确仿真,即拒绝式(7)。

2 其它形式性能曲线仿真检验方法

2.1 多阶段线性性能曲线仿真检验方法

除线性性能曲线外,工程中还存在大量含拐点的线性性能曲线,这类性能曲线有如下特点:

(1)在不同阶段变化规律各异,呈现出分段函数的形式;

(2)在各阶段表现为线性过程,或者经过适当变换后具有良好的线性形式。如应力松弛曲线^[13]、裂纹扩展曲线^[14]等。

对于这类性能曲线,除各段直线的截距和斜率外,还应关注相邻两阶段间拐点的位置是否仿真正确。以双阶段线性性能曲线为例,其变化规律可表示为:

$$y = \begin{cases} A_1 + B_1x & x < X_0 \\ A_2 + B_2x & x \geq X_0 \end{cases}, \quad (27)$$

曲线的特征参数向量记作 $\mathbf{Z} = (A_1, B_1, X_0, A_2, B_2)^T$, 为五元随机变量,此时 $k=5$ 。若只关注曲线的某一阶段,则需要检验的特征参数向量为 $\mathbf{Z} = (A_i, B_i, X_0)^T$, $i=1$ 或 2 , 此时 $k=3$ 。仿真结果的检验方法与第1节所述方法相同,把相应的 k 值代入各式即可。

2.2 一般性能曲线仿真检验方法

一般的性能曲线可记作:

$$y = f(x | A_1, A_2, \dots, A_k), \quad (28)$$

其特征参数向量记作 $\mathbf{Z} = (A_1, A_2, \dots, A_k)^T$, 为 k 元随机变量。仿真结果的检验方法与第1节所述方法相同。

3 工程算例

橡胶构件是工程上常用的密封件,在贮存和使用过程中发生老化,进而导致密封性能丧失是其关键失效模式。描述橡胶老化的性能指标通常为压缩永久变形 $1 - C_t$, 大量研究表明,变换后的老化性能指标 $y = \ln[-\ln(1 - C_t)]$ 和对数时间 $x = \ln t$ 满足线性函数关系^[15]。图1给出了某丁腈硫化橡胶在 100°C 下的压缩永久变形试验数据^[16] 及其实测老化曲线。

由于橡胶老化可变换为线性过程,因此,可以用截距和斜率两个特征参数,即用随机变量 $\mathbf{Z} = (A, B)^T$ 描述性能曲线的变化规律,且服从二元正态分布。其实测特征参数列见表1,相应的10次仿真

结果列见表 2。

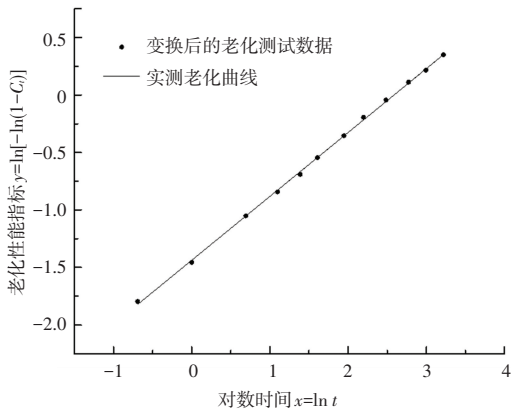


图 1 某丁腈硫化橡胶实测老化曲线

Fig. 1 Measured aging curve of vulcanized nitrile rubber

表 1 实测老化曲线的特征参数

Tab. 1 Characteristic parameters of measured aging curve

i	a_i	$b_i / 10^{-1}$
1	-1.437	5.554

表 2 仿真老化曲线的特征参数

Tab. 2 Characteristic parameters of simulated aging curve

i	a'_i	$b'_i / 10^{-1}$
1	-1.336	5.819
2	-1.618	6.467
3	-1.329	4.421
4	-1.192	5.981
5	-1.364	5.709
6	-1.281	4.896
7	-1.328	5.333
8	-1.483	5.721
9	-1.393	7.339
10	-1.555	6.935

采用本文方法检验该丁腈硫化橡胶老化性能曲线仿真结果是否正确,将 $k = 2, n = 1, m = 10$ 及表 1 和表 2 中的结果代入式(8)~式(12),求得

$$\bar{Z} = (-1.437, 0.5554)^T$$

$$\bar{Z}' = (-1.388, 0.5862)^T$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.0167 & -0.0057 \\ -0.0057 & 0.0078 \end{bmatrix}$$

进而得到

$$T = 0.695$$

给定 $\alpha = 0.05$, 查表得 $F_{0.05}(2, 8) = 4.459$, 从而有

$$0.695 = T < \sqrt{\frac{k(m+n-2)}{m+n-k-1}} F_{\alpha}(k, m+n-k-1) = 3.167$$

成立,即未落于拒绝域。因此,在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下,没有理由认为该橡胶密封圈的老化曲线仿真不正确。

4 结束语

(1)建立了性能曲线仿真检验方法,该方法通过性能曲线的特征参数是否被正确仿真进行检验。

(2)本文方法能够分析仿真结果与试验结果之间的误差是由仿真错误引起的系统误差,还是由其分散性引起的偶然误差,进而判断仿真正确与否。

(3)对于正态分布情况,根据多元统计分析理论,分别给出性能曲线特征参数均值和协方差的仿真拒绝域。

(4)对于非正态分布及分布形式未知等情况,进一步建立性能曲线两步仿真检验法,给出相应的仿真拒绝域。

(5)文中详细讨论了线性性能曲线的仿真检验,在此基础上,分别给出了多阶段线性性能曲线和一般性能曲线仿真检验方法。

(6)大量工程实例计算和 Monte Carlo 模拟验证表明,本文方法能够实现性能曲线小样本仿真检验,且计算简单,便于工程应用。

参考文献

[1] 周黎, 杨世洪, 高晓东. 步进电机控制系统建模及运行曲线仿真[J]. 电机与控制学报, 2011, 15(1): 20-25.
 ZHOU Li, YANG Shihong, GAO Xiaodong. Modeling of stepper motor control system and running curve simulation[J]. Electric Machines and Control, 2011, 15(1): 20-25.

[2] 孙丹, 王双, 艾延廷, 等. 阻旋栅对密封静力与动力特性影响的数值分析与实验研究[J]. 航空学报, 2015, 36(9): 3002-3011.
 SUN Dan, WANG Shuang, AI Yanting, et al. Numerical and experimental research on performance of swirl brakes for the static and dynamic characteristics of seals[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(9): 3002-3011.

[3] SARGENT R G. Verification, validation and accreditation of simulation models[J]. Applied System Simulation, 1997, 1(4): 487-506.

[4] 唐见兵, 查亚兵, 李革. 仿真 VV&A 研究综述[J]. 计算机仿真, 2006, 23(11): 82-85.
 TANG Jianbing, ZHA Yabing, LI Ge. An overview of the research on VV&A in simulation[J]. Computer Simulation, 2006, 23(11): 82-85.

[5] 傅惠民. 仿真结果统计检验方法[J]. 机械强度, 2005, 27(5): 598-603.
 FU Huimin. Statistical test method for simulation results[J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(5): 598-603.

(下转第 192 页)