

李宏岩, 霍晔, 孙臻, 等. 基于黎曼求解器的 SPH 算法及其应用[J]. 智能计算机与应用, 2024, 14(8): 98-101. DOI:10.20169/j.issn.2095-2163.240816

基于黎曼求解器的 SPH 算法及其应用

李宏岩, 霍晔, 孙臻, 张煜, 于洋, 冯杨, 赵岗
(辽沈工业集团有限公司, 沈阳 110045)

摘要: 基于传统光滑粒子流体动力学方法 (SPH) 进行数值模拟时, 在边界处存在压力和速度震荡, 甚至导致求解失败。为准确求解 SPH 方程式中的粒子的物理粘性, 减小数值耗散, 将黎曼求解器纳入 SPH 格式中, 通过重整化过程对连续性方程中的梯度算子进行了校正。通过一系列经典算例的数值模拟结果表明, 基于黎曼求解器的 SPH 算法能够准确的模拟液体的流动, 且具有良好的准确性和鲁棒性。

关键词: 光滑粒子流体动力学; 黎曼求解器; 数值模拟; 压力震荡

中图分类号: TP301.6 文献标志码: A 文章编号: 2095-2163(2024)08-0098-04

SPH algorithm based on Riemann solver and its application

LI Hongyan, HUO Ye, SUN Zhen, ZHANG Yu, YU Yang, FENG Yang, ZHAO Gang
(Liao Shen Industries Group Co., Ltd, Shenyang 110045, China)

Abstract: In the numerical simulation based on the traditional smooth particle fluid dynamics (SPH) method, there are pressure and velocity oscillations at the boundary, and even the solution fails. In order to accurately solve the physical viscosity of the particles in the SPH equation and reduce the numerical dissipation, the Riemann solver is incorporated into the SPH scheme, and the gradient operator in the continuity equation is corrected by renormalization. Through a series of classical examples, the numerical simulation results show that the SPH algorithm based on Riemann solver can accurately simulate the flow of liquid, and has good accuracy and robustness.

Key words: smooth particle fluid dynamics; Riemann solver; numerical simulation; pressure shock

0 引言

光滑粒子流体动力学方法 (Smoothed-Particle Hydrodynamics, SPH) 是一种拉格朗日框架下的无网格方法^[1-3]。不同于有限元方法 (Finite Element Method, FEM)、有限体积法 (Finite Volume Method, FVM) 和有限差分法 (Finite Difference Method, FDM) 等有网格方法, SPH 将数值模型离散为粒子, 每个粒子带有各自的物理属性, 如质量、密度、压力、速度等^[4-5]。在一些极端变形的情况下, SPH 不会因产生网格畸变而造成求解失败。

作为一种改进的 SPH 算法, 基于黎曼求解器的

SPH 算法是使用黎曼算法求解粒子之间的相互作用。基于黎曼求解器的 SPH 算法在求解黎曼问题时引入隐式数值耗散, 以更精确的方式控制耗散, 准确的捕捉到接触不连续界面、极端激波和强稀疏波等^[6-7]。Monaghan J J^[8] 通过求解黎曼问题, 使用 SPH 方法准确的捕捉到冲击波及相关激波。Inutsuka 等^[9] 将 SPH 方程用卷积的形式重新进行了表述, 推导出新的粒子运动方程, 并通过求解黎曼问题加强了该方法。结果显示, 求解黎曼问题使其对强冲击现象的研究更加准确。Zhang C^[10] 在弱可压缩 SPH 方法中, 采用加权基本非震荡 (WENO) 重建。沿着每个相互作用的粒子对构建四点模板, 并

作者简介: 霍晔 (1994-), 男, 硕士, 工程师, 主要研究方向: 数值分析; 孙臻 (1982-), 男, 学士, 高级工程师, 主要研究方向: 智能弹药机械加工; 张煜 (1997-), 女, 硕士, 工程师, 主要研究方向: 塑性成型; 于洋 (1979-), 男, 专科, 工程师, 主要研究方向: 弹体机械加工; 冯杨 (1996-), 男, 硕士, 工程师, 主要研究方向: 数值分析; 赵岗 (1997-), 男, 学士, 工程师, 主要研究方向: 数值模拟。

通讯作者: 李宏岩 (1995-), 男, 学士, 工程师, 主要研究方向: 火箭总装总调技术研究。Email: 448846420@qq.com

收稿日期: 2024-01-04

应用 WENO 重建确定粒子的相互作用与低耗散黎曼解算器。通过旋涡、溃坝和非线性液体晃动等数值算例证明了该方法能够具有光滑、精确压力场的能力。Anhkan R 等^[11]用黎曼解算器确定的压力和速度代替粒子的压力和速度, 并与 WCSPH 和 ISPH^[12-15]一起用于研究非线性晃动流, 对这些技术的精度、稳定性和效率进行了评价, 并与实验数据进行了比较。杨秋足等^[16]开发一套基于黎曼求解器的能够求解大密度比的多相流计算模型, 准确地求解多相流体物理粘性、减小黎曼耗散^[17-20]。对方形液滴震荡和气泡上浮等算例进行了模拟, 结果表明, 改进的基于黎曼求解器的模型能够稳定、有效的模拟大密度比和粘性比的多相流问题。

1 理论方法

1.1 SPH 方法的基础理论

SPH 方法的核心思想包括核近似原理和粒子近似原理。在核近似理论中, 引入核函数 W 描述粒子之间的相互作用。任意的连续函数 $f(r)$ 及其导数 $\nabla f(r)$ 可以表示为:

$$f(r) = \int_{\Omega} f(r') W(r - r', h) dr' \quad (1)$$

$$\nabla f(r) = \int_{\Omega} f(r') \nabla_r W(r - r', h) dr' \quad (2)$$

式中: Ω 表示问题域, h 是定义核函数 W 支持域的光滑长度, ∇_r 表示相对位置 r 的梯度。

在传统 SPH 方法框架下, 粒子 i 的函数值及其导数可由支持域内其他粒子插值得到, 公式表示为:

$$f(r_i) = \sum_{j=1}^N f(r_j) W(r_i - r_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3)$$

$$\nabla f(r_i) = \sum_{j=1}^N f(r_j) \nabla_i W(r_i - r_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (4)$$

式中: 下标 i 和 j 为粒子编号, N 为粒子 i 处支持域内的粒子总数, m_j 和 ρ_j 分别为粒子 j 的质量和密度。

SPH 模型的性能在很大程度上取决于核函数的选择。核函数的选择应该满足以下条件, 如紧支性、正则性和紧凑性等。此外, 核函数必须随着相互作用对粒子间距离的增加而减小, 且应当满足近似狄拉克 δ 函数条件和具备较大的中心峰值, 从而提高近似精度。狄拉克 δ 函数如公式(5)所示。本文使用三次样条核函数, 见公式(6)。

$$\delta(r - r') = \begin{cases} 1, & r = r' \\ 0, & r \neq r' \end{cases} \quad (5)$$

$$W(r - r', h) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2} R^3, & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6} (2 - R)^3, & 1 \leq R < 2 \\ 0, & R \geq 2 \end{cases} \quad (6)$$

其中, $R = r/h$, 为点 r 和点 r' 处两粒子间相对距离。在一维、二维和三维空间中分别有 $\alpha_d = 1/h$ 、 $15/7\pi h^2$ 和 $3/2\pi h^3$ 。

使用 SPH 方法求解不可压缩流体的动量守恒方程和连续性方程, 方程为:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot v = 0 \quad (7)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu_o \nabla^2 v + f \quad (8)$$

式中: ρ 为流体密度, t 为时间, v 为速度矢量, p 为流体压力, f 为体力, ν_o 为运动粘度系数。

本文将流体视为弱可压缩流体, 为求解控制方程, 将压力与密度和比内能联系起来的状态方程被写为

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (9)$$

声速被写为

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (10)$$

1.2 黎曼解算器 SPH 公式

为了建立黎曼解算器-光滑粒子流体动力学格式, 将黎曼问题引入到 SPH 公式中, 如下所示:

$$\frac{d\phi_a}{dt} = 2\rho_a \sum_b (u_a - u^*) \cdot \nabla_a W_{ab} V_b \quad (11)$$

$$\frac{du_a}{dt} = -2 \sum_b \frac{p^*}{\rho_a} \nabla_a W_{ab} V_b \quad (12)$$

式中:

$$u^* = \frac{1}{2} \left[u_L + u_R + \frac{1}{C_{RL}} (p_L - p_R) \right] \quad (13)$$

$$p^* = \frac{1}{2} [p_L + p_R + C_{RL}(u_L - u_R)] \quad (14)$$

$$C_{RL} = \frac{c_R \rho_R \sqrt{\rho_R} + c_L \rho_L \sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad (15)$$

2 数值模拟

2.1 二维溃坝问题

考虑到添加障碍物的溃坝流动, 给出了该算例初始状态时的计算模型如图 1 所示。其中, H 为 0.4 m。溃坝流动液体为水, 密度为 1 000 kg/m³, 粒

子间距为 0.002 m, 粘度为 0.001 kg/(m·s)。溃坝流动过程如图 2 所示, 图中可以观测到清晰的液滴飞溅和均匀的压力分布。

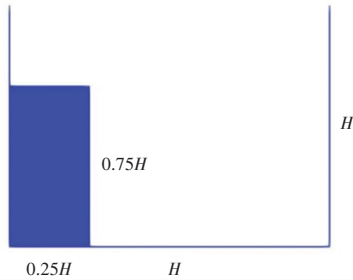


图 1 二维溃坝初始状态图

Fig. 1 Two-dimensional initial state diagram of dam break

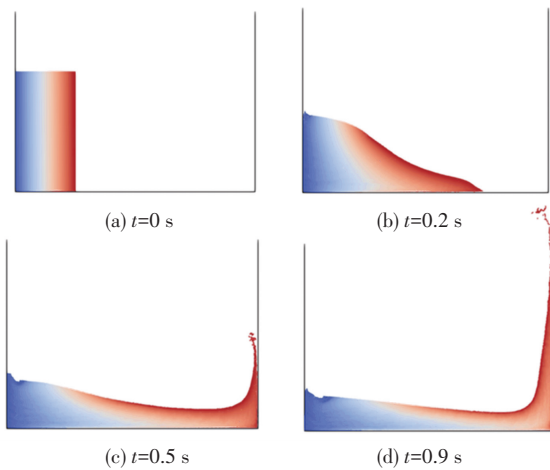


图 2 二维溃坝流动过程图

Fig. 2 Two-dimensional flow process diagram of dam break

2.2 三维溃坝问题

三维溃坝初始状态的计算模型与二维相似, 在三维计算模型中添加矩形块障碍物, 宽度方向为 $0.4H$, 其余参数均与二维溃坝相同。图 3 为该算例初始状态时的计算模型。图 4 为三维溃坝的流动过程。由图中可以看出, 在有障碍物的情况下, 溃坝流动过程中避开障碍物, 且能观察到溃坝流动过程出现的卷曲和飞溅现象。

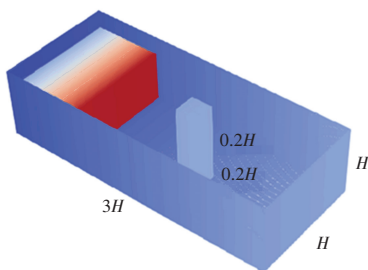


图 3 三维溃坝初始状态图

Fig. 3 3D initial state diagram of dam break

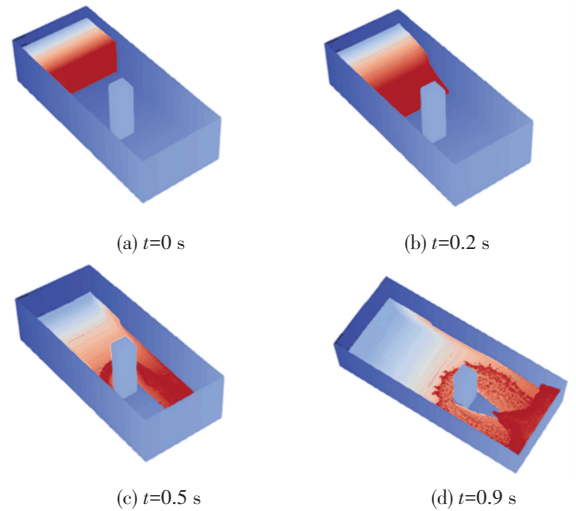


图 4 三维溃坝流动过程图

Fig. 4 3D flow process diagram of dam break

3 结束语

本文研究了基于黎曼求解器的 SPH 算法, 并将其应用到二维溃坝和三维溃坝问题。通过数值模拟验证了基于黎曼求解器的 SPH 算法能够处理大变形流体流动问题, 具有良好的可行性和鲁棒性。基于黎曼求解器的 SPH 算法可以得到光滑的压力和速度分布, 降低了传统 SPH 方法存在的边界处的压力和速度震荡。

参考文献

- [1] LUCY L C. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. *Astronomical Journal*, 1977, 82 (82): 1013-1024.
- [2] LIU Moubin, ZHANG Zhilang. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for modeling fluid-structure interactions[J]. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2019, 62: 984701.
- [3] HUANG C, LEI J M, LIU M B, et al. An improved KGF-SPH with a novel discrete scheme of Laplacian operator for viscous incompressible fluid flows[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2016, 81: 377-396.
- [4] HUO Y, ZHONG Y, NING J, et al. Restoring particle consistency in discontinuous smoothed particle hydrodynamics[J]. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 2023, 100: 223-238.
- [5] WENDLAND H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 1995, 4(1): 389-396.
- [6] XU F, ZHAO Y, YAN R, et al. Multi-dimensional meshfree particle formulation for simulation shock waves[J]. *Shock Wave*, 2013, 93: 1125-1146.
- [7] XU R, STANSBY P, Dominique laurence. accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228: 6703-6725.
- [8] MONAGHAN J J, KAJTAR J B. SPH particle boundary forces for

- arbitrary boundaries [J]. *Computer Physics Communications*, 2009, 180: 1811–1820.
- [9] INUTSUKA S I. Reformulation of smoothed particle hydrodynamics with riemann solver[J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, 179: 238–267.
- [10] ZHANG C, XIANG G M. A weakly compressible SPH method with WENO reconstruction[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 392: 1–18.
- [11] RAFIEE A. Comparative study on the accuracy and stability of SPH schemes in simulating energetic free – surface flows [J]. *European Journal of Mechanics B/Fluids*. 2012, 36: 1–16.
- [12] ACHIM C V, ROZAS R E, TOLEDO P G. Semi – decoupled first – order correction for smoothed particle hydrodynamics [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 93: 314–325.
- [13] 张永祥, 陈景秋. 用守恒元和解元法数值模拟二维溃坝洪水波 [J]. *水利学报*, 2005, 36(10): 1224–1229.
- [14] FANG J, PARRIAUX A, RENTSCHLER M, et al. Improved SPH methods for simulating free surface flows of viscous fluids [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2009, 59: 251–271.
- [15] JEONG S H, SOLENTHALER B, POLLEFEYS M, et al. Data-driven fluid simulations using regression forests [J]. *ACM Transactions Graphics*, 2015, 34(6): 199.
- [16] 杨秋足, 徐绯, 王璐. 一种基于黎曼解处理大密度比多相流 SPH 的改进算法 [J]. *力学学报*. 2019, 51(3): 730–742.
- [17] SOLENTHALER B, PAJAROLA R. Density contrast SPH interfaces [C] // *Proceedings of ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation*. IEEE, 2008, 211–218.
- [18] MISZTAL M K, ERLEBEN K, BARGTEIL A, et al. Multiphase flow of immiscible fluids on unstructured moving meshes [J]. *IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics*, 2014, 20(1): 4–16.
- [19] JESCHKE S, WOJTAN C. Water wave animation via wave front parameter interpolation [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2015, 34(3): 1–14.
- [20] 刘梅娥, 周进雄. 不可压流体自由表面流动的 SPH 数值模拟 [J]. *机械工程学报*, 2004, 40(3): 5–9.