

张山华, 王鸿翔. 基于原始序列变换与背景值组合优化的 GM(1,1) 模型[J]. 智能计算机与应用, 2024, 14(11): 131-137. DOI: 10.20169/j.issn.2095-2163.241120

基于原始序列变换与背景值组合优化的 GM(1,1) 模型

张山华, 王鸿翔

(江苏电子信息职业学院 数字装备学院, 江苏 淮安 223003)

摘要: 原始序列的光滑度与级比偏差是影响 GM(1,1) 模型预测精度的重要因素, 为了提高模型的预测精度, 本文提出了基于原始序列变换与背景值组合优化的 GM(1,1) 模型。该模型首先对原始序列进行反余弦函数与幂函数的组合变换, 变换函数中包含 2 个待定参数, 并通过理论证明该种函数变换能够提高原始序列的光滑度且减小级比偏差, 同时使用优化背景值代替传统背景值, 背景值函数中包含 2 个待定参数。以平均相对误差作为适应度函数, 利用粒子群算法搜索出 GM(1,1) 模型中 4 个待定参数最优值, 并将最优参数带入 GM(1,1) 模型进行预测。以国内 1990~2005 年的客运量序列为例, 1990~2002 年的数据作为拟合样本, 2003~2005 年的数据作为预测样本。验证结果表明, 基于原始序列变换与背景值组合优化的 GM(1,1) 模型拟合平均相对误差相较于基于指数函数变换、正切函数变换、反余弦函数变换、正切函数与幂函数组合变换、反余弦函数与线性函数组合变换的 GM(1,1) 模型拟合平均相对误差最高可分别降低 1.71%、0.16%、1.08%、0.14% 与 0.12%。预测平均相对误差相较于基于指数函数变换、正切函数变换、反余弦函数变换、正切函数与幂函数组合变换、反余弦函数与线性函数组合变换的 GM(1,1) 模型预测平均相对误差最高可分别降低 0.33%、0.28%、2.31%、0.45% 与 0.14%。

关键词: GM(1,1) 模型; 原始序列; 背景值; 粒子群算法

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

文章编号: 2095-2163(2024)11-0131-07

GM(1,1) model based on combination optimization of initial sequence transformation and background value

ZHANG Shanhu, WANG Hongxiang

(Department of Digital Equipment, Jiangsu Vocational College of Electronics and Information, Huai'an 223003, Jiangsu, China)

Abstract: The smoothness and class ratio of the initial sequence is the key to GM(1,1) model prediction. In order to improve the prediction accuracy of the model, the GM(1,1) model based on combination optimization of initial sequence transformation and background value is proposed in this paper. Firstly, The model transforms the combination of the arccosine function and the power function of the original sequence, which contains two parameters to be determined, and theoretically proves that this function transformation can improve the smoothness of the original sequence and reduce the cascade deviation. Meanwhile, the optimized background value which contains two pending parameters are used to replace the traditional background value. The average relative error is taken as fitness function. The particle swarm algorithm is used to search for the optimal value of the four parameters to be determined in the GM(1,1) model, and the optimal parameter is brought into the GM(1,1) model for prediction. Taking China's passenger traffic series from 1990 to 2005 as an example, the data from 1990 to 2002 are used as the fitting sample, and the data from 2003 to 2005 are used as the prediction sample. The verification results show that the GM(1,1) model based on combination optimization of initial sequence transformation and background value can decrease the fitting average relative error by 1.71%, 0.16%, 1.08%, 0.14% and 0.12% compared with GM(1,1) models based on exponential function transformation, tangent function transformation, inverse cosine function transformation, combined transformation of tangent function and power function and combined transformation of inverse cosine function and linear function. The GM(1,1) model based on combination optimization of initial sequence transformation and background value can decrease the prediction average relative error by 0.33%, 0.28%, 2.31%, 0.45% and 0.14% compared with GM(1,1) models based on exponential function transformation, tangent function transformation, inverse cosine function transformation, combined transformation of tangent function and power function and combined transformation of inverse cosine function and linear function.

Key words: GM(1,1) model; initiation sequence; background value; particle swarm optimization algorithm

基金项目: 江苏省高校哲学社会科学基金项目(2022SJYB1969); 江苏省高校优秀科技创新团队-电子精密模具先进制造技术团队建设项目; 淮安市基础研究计划(联合专项)项目(HABL2023027)。

作者简介: 王鸿翔(1970—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向: 交通运输系统优化。

通信作者: 张山华(1993—), 男, 助教, 主要研究方向: 灰色系统理论研究, 交通运输规划与管理, 交通系统优化。Email: 1271625479@qq.com。

收稿日期: 2023-06-28

哈尔滨工业大学主办 ◆ 专题设计与应用

0 引言

灰色系统理论经过几十年的发展,被广泛运用到各个领域^[1-3]。GM(1,1)模型是灰色系统理论中的重要预测方法,具有所需样本少、预测精度高的优点。研究发现原始序列的光滑度与级比偏差是影响GM(1,1)模型预测精度的重要因素^[4-5]。为了提高GM(1,1)模型的预测精度,传统文献分别提出了对数函数变换^[4]、方根变换^[5]、幂函数变换^[6]、数乘变换^[7]、指数函数变换^[8]、三角函数变换^[9]、反三角函数变换^[10]以及各种方法的复合变换^[11-16]。这些函数变换提高了数据的光滑度或减小了级比偏差,也提高了GM(1,1)模型的预测精度。文献[10]首次提出了反余弦函数变换,并证明了这种变换是级比压缩变换,且能够提高序列的光滑度。文献[14]提出了反余弦函数和线性函数相结合的变换方法,并证明了这种变换一方面能提高序列的光滑度并压缩序列的级比,另一方面可以减小预测误差。文献[10]与文献[14]都采用了反余弦函数变换,且提高了模型的预测精度。但是文献[10]与文献[14]都存在一个问题,由于反余弦函数自变量区间为 $[-1, 1]$,需要对原始序列进行预处理,文献[10]与文献[14]都采用了相同的处理方法,但“静态”的处理方法,会使模型不能适用于不同序列。

根据文献[17]可知灰生成技术、边值条件、背景值、模型参数估计方法、残差序列都是属于GM(1,1)模型优化方法。原始序列函数变换优化属于灰生成技术,但是单种优化方法容易使预测精度达到瓶颈,预测精度很难进一步提升。文献[18]提出了基于遗传算法求解最佳背景值参数 λ 和最佳边界值修正项 ε 的方法,明显提高了模型的预测精度。文献[19]从背景值构造和初始值确定两个方面分析了GM(1,1)模型的不足,建立了加权背景值和带有修正项的初始值,实例表明改进的GM(1,1)模型优于普通灰色预测模型。文献[20]将GM(1,1)模型中的灰色作用量改为动态形式,并利用最小二乘

法和新陈代谢的思想,提出一种改进的灰色预测模型,拓宽了灰色预测模型的适用范围。文献[21]建立基于背景值与初始条件同时优化的非等间距GM(1,1)模型,并通过实例验证此模型的有效性与可行性。上述模型使用不同组合优化方法突破了单种优化方法预测精度的限制。

基于此,本文提出了一种基于原始序列变换与背景值组合优化的GM(1,1)模型。为了提高反余弦函数变换的预测精度,将反余弦函数与幂函数进行组合,提出原始序列基于 $\arccos((x/c)^\rho)$ 函数变换的GM(1,1)模型。并用理论证明了经过该函数变换可以提高数据序列的光滑度还可以减少原始序列的级比偏差,同时为了解决单种优化方法容易达到预测精度的瓶颈,使用优化的GM(1,1)模型背景值代替传统GM(1,1)模型梯形背景值,并通过粒子群算法确定模型中待定参数的取值,最终通过实例验证优化方法可以提高GM(1,1)模型的拟合精度与预测精度。

1 研究思路

本研究提出了一种基于原始序列变换与背景值组合优化的GM(1,1)模型,并进行了如下几方面研究,如图1所示。在步骤1中,通过文献综述对传统GM(1,1)模型优化方法进行了分析,从这一步开始,确定了本文的研究思路是基于原始序列变换与背景值组合优化。在步骤2中,分析了基于反余弦函数与幂函数组合函数的性质,证明了该种函数变换能够提高原始序列的光滑度且减小级比偏差。步骤3提出了优化的背景值构建思路。步骤4研究了基于原始序列变换与背景值组合优化GM(1,1)模型的建模步骤,提出三待定参数的确定是优化GM(1,1)模型预测的关键。步骤5中,基于粒子群算法确定4个参数最优值。步骤6中,本文方法分别与传统5种GM(1,1)模型从拟合误差与预测误差两个方面进行对比。

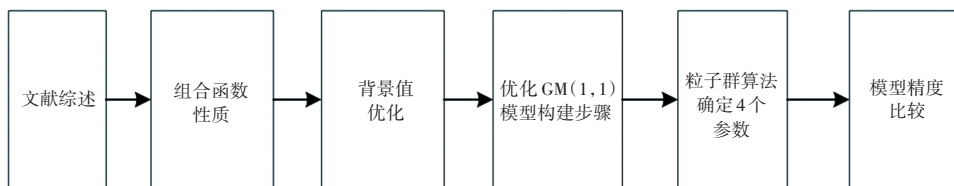


图1 研究流程图

Fig. 1 Flow chart of the research

2 基于 $\arccos(x^\varphi)$ ($0 < x \leq 1, \varphi > 0$) 函数变换的性质

定义 1^[22] 序列 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(k), k = 1, \dots, n\}$ 为非负数据序列, 令 $x^{(1)}(k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} x^{(0)}(i)$, 则称:

$$\rho_k = \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}, k = 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

为序列 $X^{(0)}$ 的光滑比。

定义 2^[21] 设 $X^{(0)}$ 为非负序列, F 是一个函数, 则 $X^{(0)}$ 在 F 的作用下变为新的序列:

$$F(X^{(0)}) = (F(x^{(0)}(1)), F(x^{(0)}(2)), \dots, F(x^{(0)}(n))) \quad (2)$$

若序列 $F(X^{(0)})$ 满足下列不等式:

$$\frac{F(x^{(0)}(k))}{\sum_{i=1}^{k-1} F(x^{(0)}(i))} \leq \frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1} x^{(0)}(i)} \quad (3)$$

则称变换 F 为提高序列 $X^{(0)}$ 光滑比的函数变换。

定义 3^[21] 设 F 和 G 为 2 种函数变换, 若对任意的非负序列 $X^{(0)}$ 有:

$$\frac{F(x^{(0)}(k))}{\sum_{i=1}^{k-1} F(x^{(0)}(i))} \leq \frac{G(x^{(0)}(k))}{\sum_{i=1}^{k-1} G(x^{(0)}(i))} \quad (4)$$

则称变换 F 提高序列光滑度的效果优于变换 G 。

定义 4^[21] 对非负序列 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, 称:

$$\delta(k) = \left| 1 - \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} \right|, \quad (5)$$

$$\delta_F(k) = \left| 1 - \frac{F(x^{(0)}(k))}{F(x^{(0)}(k-1))} \right|$$

分别为序列 $X^{(0)}$ 及 $F(X^{(0)})$ 的级比偏差。

定义 5^[21] 在定义 4 中, 若 $\delta_F(k) < \delta(k)$, 则称函数变换 $F(x^{(0)}(k))$ 是级比压缩变换。

性质 1^[21] 设 F 和 G 为 2 种函数变换, 变换 F 提高单调递增序列 $X^{(0)}$ 的光滑度的效果优于变换 G 的充要条件是 $\frac{F(x^{(0)})}{G(x^{(0)})}$ 是关于 $x^{(0)}$ 的单调递减函数。

性质 2^[21] 对于非负序列 $X^{(0)}$, 如果非负变换 $F(X^{(0)}) = x^{(0)}(k) \cdot g(x^{(0)}(k))$, 其中 $g(\cdot)$ 非负且严格单调下降, 则变换后的级比小于原始序列的级比, 可称函数变换 $F(x^{(0)}(k))$ 是级比压缩变换。

定理 1 设 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots,$

$x^{(0)}(n)\}$, $0 < x^{(0)}(k) \leq 1 (k = 0, 1, \dots, n)$ 为递增序列, 则 $\arccos(x^{(0)}(k))^\varphi (k = 0, 1, \dots, n)$ 是光滑离散序列。

证明 首先构造一个函数:

$$f(x^{(0)}(k)) = \frac{\arccos(x^{(0)}(k))^\varphi}{x^{(0)}(k)} \quad (6)$$

对上式求导可得:

$$f'(x^{(0)}(k)) = \frac{-\frac{\varphi(x^{(0)}(k))^{\varphi-1}}{\sqrt{1-(x^{(0)}(k))^{2\varphi}}} x^{(0)}(k) - \arccos(x^{(0)}(k))^\varphi}{(x^{(0)}(k))^2} < 0 \quad (7)$$

$f(x^{(0)}(k))$ 为单调减函数, 由性质 1 可知, 基于 $\arccos(x^\varphi)$ 函数变换能够提高原始序列的光滑度。

定理 2 设 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, $0 < x^{(0)}(k) \leq 1 (k = 0, 1, \dots, n)$ 为递增序列, $\arccos(x^{(0)}(k))^\varphi, (0 < x \leq 1, \varphi > 0)$ 变换为级比压缩变换。

证明 根据性质 2, 如果非负变换 $F(X^{(0)}) = x^{(0)}(k) \cdot g(x^{(0)}(k))$, 设 $F(X^{(0)}) = \arccos(x^{(0)}(k))^\varphi$, 即:

$$g(x^{(0)}(k)) = \frac{\arccos(x^{(0)}(k))^\varphi}{x^{(0)}(k)} \quad (8)$$

又因为 $X^{(0)}$ 为非负递增序列且 $0 < x^{(0)}(k) \leq 1$, 可得 $\arccos(x^{(0)}(k))^\varphi > 0$, 即 $g(x^{(0)}(k)) > 0$ 。同时根据定理 1 可知 $g(x^{(0)}(k))$ 为单调减函数, 根据性质 2 可知变换后的级比小于原始序列的级比, $\arccos(x^\varphi)$ 函数变换为级比压缩变换。

3 GM(1,1) 模型背景值优化

3.1 背景值的几何意义分析

背景值实际值 $S_1 =$ 线段 $A(k-1)$ 、线段 $(k-1)k$ 、线段 kB 与曲线 BA 所围成的面积, 背景值是 GM(1,1) 建模的重要组成部分, 由于曲线 BA 处的表达式未知, 无法得到背景值的实际值, 为了构建 GM(1,1) 模型, 简化背景值计算, 将线段 $A(k-1)$ 、线段 $(k-1)k$ 、线段 kB 与线段 BA 所围成的梯形面积作为背景值的估算值, 计算公式为:

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2} \cdot (x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), k = 2, \dots, n \quad (9)$$

而曲线 AB 与线段 AB 围成的面积是传统背景值计算公式的误差来源。背景值几何意义如图 2 所示。

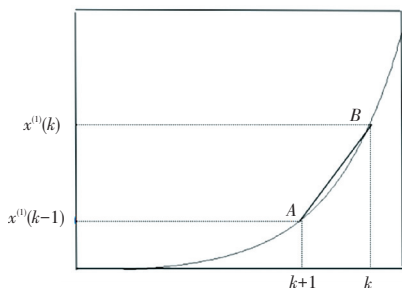


图2 背景值几何意义图

Fig. 2 Geometric meaning map of background values

3.2 优化的背景值

为了减小背景值实际值与估算值的误差,文献[23]背景值计算方法的数学公式为:

$$z^{(1)}(k) = ax^{(1)}(k-1) + (1-a)x^{(1)}(k), k=2, \dots, n \quad (10)$$

文献[23]将背景值参数待定化,提高了模型的适用性与预测精度,但是曲线BA表达式未知且变化复杂,仅采用相邻的2个累加序列线性接近难度较大,为了进一步提高背景值估算的精度,本文提出了如下背景值估算方法:

$$\begin{cases} z^{(1)}(k) = \varepsilon \cdot x^{(1)}(k-2) + \beta \cdot x^{(1)}(k-1) + \\ (1-\varepsilon-\beta) \cdot x^{(1)}(k), k=3, \dots, n \quad (11) \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1 \text{ 且 } 0 \leq \varepsilon + \beta \leq 1 \end{cases}$$

其中, ε 与 β 分别表示待定背景值参数。当 $\varepsilon = 0, \beta = 0.5$, 即为经典的背景值计算公式;当 $\varepsilon = 0, \beta$ 待定,即为文献[23]背景值计算公式。即本文优化的背景值估算方法包含了传统的背景值计算方法,并且包含了2个待定参量,可进一步提高模型的适应性。

4 原始序列变换与背景值组合优化 GM(1,1) 模型的建模步骤

设原始数据非负单调递增序列为: $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, $(x^{(0)}(k) > 0, k = 1, \dots, n)$, 对原始序列进行归一化预处理,使其处于区间 $(0, 1)$ 内,得到新序列 $P^{(0)}$ 如下所示:

$$P^{(0)} = \{p^{(0)}(1), p^{(0)}(2), \dots, p^{(0)}(n)\} \quad (12)$$

其中, $p^{(0)}(k) = x^{(0)}(k)/c$, c 表示归一化参数,该常数 $c > \max\{x^{(0)}(k), k=1, \dots, n\}$ 。对 $P^{(0)}$ 序列进行 $\arccos(x)^\varphi$ 变换,得到序列 $R^{(0)}$:

$$R^{(0)} = \{r^{(0)}(1), r^{(0)}(2), \dots, r^{(0)}(n)\} \quad (13)$$

其中, $r^{(0)}(k) = \arccos(p^{(0)}(k))^\varphi$, $\varphi > 0$ 、为幂参数,可以使序列 $P^{(0)}$ 经过幂函数变换后的值仍满足反余弦函数的定义域区间,对 $R^{(0)}$ 进行一次累加计算得到 $R^{(1)}$ 序列:

$$R^{(1)} = \{r^{(1)}(1), r^{(1)}(2), \dots, r^{(1)}(n)\} \quad (14)$$

其中, $r^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k r^{(0)}(i)$, GM(1,1)模型优化的背景值可由下式计算求出:

$$z^{(1)}(k) = \varepsilon \cdot r^{(1)}(k-2) + \beta \cdot r^{(1)}(k-1) + (1-\varepsilon-\beta) \cdot r^{(1)}(k), k=3, \dots, n \quad (15)$$

其中, ε 与 β 分别表示待定背景值参数, $0 \leq \varepsilon \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ 且 $0 \leq \varepsilon + \beta \leq 1$ 。GM(1,1)模型灰微分方程可由如下公式来表示:

$$r^{(0)}(k) + a \cdot z^{(1)}(k) = u, k=3, \dots, n \quad (16)$$

其中,参数 a, u 为 GM(1,1)模型建模中的参数,计算方法如下所示:

$$(a, u)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (17)$$

$$\text{其中, } B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} r^{(0)}(3) \\ \vdots \\ r^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \text{根}$$

据 GM(1,1)建模原理,白化方程见下式:

$$\frac{dr^{(1)}}{dt} + a \cdot r^{(1)} = u \quad (18)$$

求解白化微分方程,得到基本形式的时间响应序列的计算公式如下:

$$\hat{r}^{(1)}(k+1) = \left(r^{(1)}(1) - \frac{u}{a} \right) e^{-ak} + \frac{u}{a}, \quad k=0, 1, \dots, n-1 \quad (19)$$

累减还原值可由下式来描述:

$$\hat{r}^{(0)}(k+1) = \hat{r}^{(1)}(k+1) - \hat{r}^{(1)}(k) = (1-e^a) \left(r^{(1)}(1) - \frac{u}{a} \right) e^{-ak}, k=1, \dots, n-1 \quad (20)$$

其中, $\hat{r}^{(0)}(1) = \hat{r}^{(1)}(1)$, $\hat{r}^{(0)}(k)$ 由以下公式还原得 $\hat{x}^{(0)}(k)$:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = c \cdot (\cos(\hat{r}^{(0)}(k)))^{\frac{1}{\varphi}} \quad (21)$$

其中, $\hat{x}^{(0)}(k)$ 为基于组合优化 GM(1,1)模型所得预测值序列。根据建模步骤可知,参数 c, φ, ε 与 β 是 GM(1,1)模型能够预测的重要影响参数,下面介绍如何确定4个参数。

5 基于粒子群算法参数 c, φ, ε 与 β 的确定

5.1 c, φ, ε 与 β 参数范围的限定

基于原始序列变换与背景值组合优化的 GM(1,1)模型含有待定参数 c, φ, ε 与 β , c 为归一化参数, a 为幂参数, ε 与 β 为背景值参数。以国内1990~2002年的客运量序列作为原始序列,客运量如图3所示。

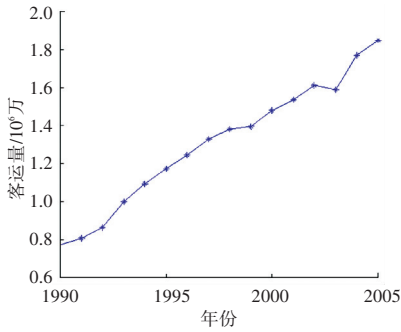


图 3 国内 1990~2005 年客运运输量

Fig. 3 Passenger transport volume in China from 1990 to 2005

为了让粒子群算法在有限的范围内进行搜索,根据文献[16],限定参数 a 的搜索范围为 $(0, 10]$, 参数 c 的搜索范围为 $(1\ 847\ 018, 3\ 000\ 000)$ 。参数 ε 与 β 搜索范围为 $[0, 1]$, 且 $(\varepsilon + \beta)$ 范围也为 $[0, 1]$ 。

5.2 基于粒子群算法参数 c 、 φ 、 ε 与 β 确定的步骤

粒子群算法思想来源于鸟群和鱼群等寻找食物的行为,粒子群算法概念简单,易于实现。该算法可与很多算法结合,基于粒子群与 GM(1,1) 模型的结合已经得到了广泛的应用^[24-25]。算法步骤具体如下。

(1) 随机初始化粒子群。假设 D 维空间中有 N 个粒子,每一个粒子的位置为 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{iD})$, 每一个粒子的速度为 $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \dots, v_{iD})$, 其中 $i = 1, \dots, N$, 粒子数 N 取 40。待定参数为 c 、 φ 、 ε 与 β , 根据待定参数的个数确定维度 D 为 4, 4 个参数的搜索范围参见 5.1 节。初始化种群时分别产生 40 个四维向量作为各个粒子初始位置与各个粒子的初始速度。

(2) 粒子适应度值的计算。本文目的是为了寻找最佳预测精度下参数 c 、 φ 、 ε 与 β 的取值,使用平均相对误差作为粒子适应度值,平均相对误差计算方法见下式:

$$e_r = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{|\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)|}{|x^{(0)}(k)|} \quad (22)$$

其中, $\hat{x}^{(0)}(k)$ 表示预测值; $x^{(0)}(k)$ 表示实际值; e_r 表示 GM(1,1) 模型预测的平均相对误差; n 表示序列的元素量。

每一个粒子群个体对应的参数 c 、 φ 、 ε 与 β 代入到第 5 节的 GM(1,1) 模型中可得一个对应的预测序列。

(3) 粒子个体最优向量 p_i 与全局最优向量 p_g 的更新。粒子 i 每一次迭代后将会产生一个 x_i , 将 x_i 带入到适应度函数中将会得到一个适应度值, 粒子 i 所

有经过的位置中选出一个适应度最小的作为个体最优向量 p_i , $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iD})$, $i = 1, \dots, N$; 从个体最优向量中选出一个适应度最小的作为粒子的全局最优向量 p_g , $p_g = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gD})$, 其中 p_g 只有一个。

(4) 粒子速度与位置的更新。每一个粒子速度都会在下次迭代中变化,变化规则主要依据当前速度、个体最优向量与全局最优向量三个部分决定。粒子速度与位置计算方法具体如下:

$$v_{ij}^{k+1} = \omega v_{ij}^k + c_1 r_1 (p_{ij}^k - x_{ij}^k) + c_2 r_2 (p_{gj}^k - x_{ij}^k) \quad (23)$$

$$x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^k + v_{ij}^{k+1} \quad (24)$$

其中,学习因子 c_1 、 c_2 为非负常数,通常都取 2; k 表示迭代次数代号; ω 为惯性权重,决定了一个粒子以前的速度保持了多少,为了防止速度更新公式受上一步速度影响较大而陷入局部最优, ω 取 0.729 8; j 表示变量代号, $j = 1, 2, \dots, D$; p_{ij}^k 表示第 i 个粒子在第 k 次迭代中第 j 个变量的个体最优值; p_{gj}^k 表示第 i 个粒子在第 k 次迭代中第 j 个变量的全局最优值; x_{ij}^k 表示第 i 个粒子在第 k 次迭代中第 j 个变量的当前值; x_{ij}^{k+1} 表示第 i 个粒子在第 $k+1$ 次迭代中第 j 个变量的值; v_{ij}^k 表示第 i 个粒子在第 k 次迭代中第 j 个变量的速度向量; v_{ij}^{k+1} 表示第 i 个粒子在第 $k+1$ 次迭代中第 j 个变量的速度向量; r_1 、 r_2 是区间 $[0, 1]$ 上的随机数。

为了防止在迭代过程中粒子跳出变量的搜索范围,需对每次更新后的变量值进行范围判断,假设第 j 个变量的搜索范围为 $[h, H]$, 若 $x_{ij}^{k+1} > H$, 则令 $x_{ij}^{k+1} = H$; 若 $x_{ij}^{k+1} < h$, 则令 $x_{ij}^{k+1} = h$, 根据该处理方式防止粒子跳出各变量的搜索范围,从而搜索出有效的结果。

(5) 终止准则。反复执行 (2) ~ (4) 的步骤,根据收敛曲线设置合适的迭代次数,粒子群算法迭代次数设为 100。

6 结果对比及分析

以 1990~2005 年的国家客运量序列作为基本数据,利用基于原始序列变换与背景值组合优化的 GM(1,1) 模型对客运量进行预测,以 1990~2002 年的客运量序列作为原始序列,利用粒子群算法对待定参数进行搜索,粒子群搜索最优解的收敛结果如图 4 所示。得到的最优参数 $c = 2\ 010\ 101.4$ 、 $\varphi = 5.38$ 、 $\varepsilon = 0.19$ 与 $\beta = 0.71$ 。利用得到的参数带入预测模型对 2003~2005 年共 3 年的客运量需求进行预测,以 2003~2005 年的实际数据作为检验数

据。将本文的 GM(1,1) 模型分别与指数函数变换、正切函数变换、反余弦函数变换、正切函数与幂函数组合变换、反余弦函数变换与线性函数组合变换的 GM(1,1) 模型进行比较,拟合结果如图 5 所示。

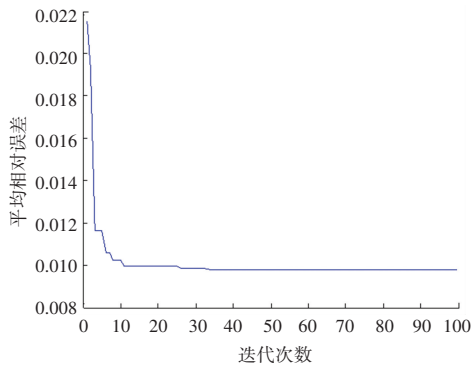


图 4 粒子群算法搜索的收敛过程

Fig. 4 The convergence process of Particle Swarm Optimization algorithm search

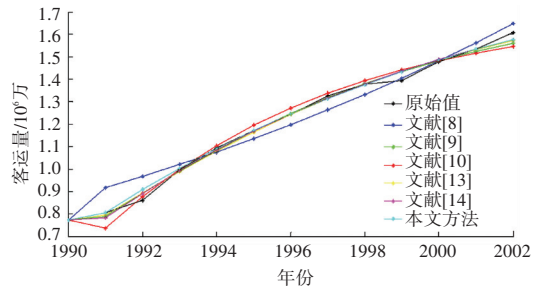


图 5 不同方法客运量拟合结果比较

Fig. 5 Comparison of passenger volume fitting results using different methods

根据图 4 可知,粒子群算法搜索最优参数解时,算法都是收敛的。根据图 5 可得到不同方法的拟合结果,为了更好地比较拟合精度,利用图 5 中拟合结果,结合式(22)得到拟合平均相对误差见表 1。利用构建好的模型预测国内 2003~2005 年的客运量,预测结果详见表 1。

表 1 不同方法客运量预测结果比较

Table 1 Comparison of different methods for predicting passenger volume

年份	原始值	文献[8]	文献[9]	文献[10]	文献[13]	文献[14]	本文方法
2003	1 587 497	1 738 803.48	1 592 807.88	1 570 723	1 608 779.26	1 615 349.40	1 617 451.48
2004	1 767 453	1 833 925.96	1 619 913.77	1 591 274	1 639 551.68	1 649 743.28	1 653 664.58
2005	1 847 018	1 934 252.19	1 643 260.93	1 608 588	1 666 440.65	1 680 706.19	1 686 636.87
拟合误差/%		3.8	1.15	2.07	1.13	1.11	0.99
预测误差/%		6.0	5.95	7.98	6.12	5.81	5.67

根据表 1 可知本文方法拟合平均相对误差为 0.99%、预测平均相对误差为 5.67%。无论是拟合误差、还是预测误差都小于其他 5 种模型。证明了原始序列基于反余弦函数与幂函数组合优化的方法优于其他文献 5 种方法。综上,证明了本文优化方法的有效性。

7 结束语

自灰色系统理论问世以来,对于 GM(1,1) 模型预测精度的提高,本文提出了一种基于原始序列变换与背景值组合优化的 GM(1,1) 模型,通过理论证明了该种变换能够提高原始序列的光滑度以及减小序列的级比偏差,同时优化了背景值,并利用粒子群算法确定 GM(1,1) 模型中的参数 c 、 a 与 θ 的取值。以国内 1990~2005 年的客运量序列为例,以 1990~2002 年的客运量序列作为原始序列得拟合误差,以 2003~2005 年的实际数据作为检验数据,将基于原始序列变换与背景值组合优化的 GM(1,1) 模型分

别与文献[8]、文献[9]、文献[10]、文献[13]与文献[14]进行比较。

结果表明,粒子群算法可以搜索到参数的最优值,所提出的模型相较于文献[8]、文献[9]、文献[10]、文献[13]与文献[14]具有更高的拟合精度与预测精度,因此,该方法可以提高模型的预测精度。然而,这项研究目前仍存在一些不足,可以通过后续工作加以改进。首先,需要更严谨的方法在理论上确定参数搜索范围。其次,新的背景值估算方法,考虑了相邻 3 个累加序列的影响,虽提高了估算精度,但使得本文优化背景值是 $n-2$ 维(经典 GM(1,1) 模型背景值是 $n-1$ 维),数据维度较小时影响预测精度。最后,影响 GM(1,1) 模型预测精度的因素较多,例如:原始序列的变换函数、初值修正、背景值、残差序列等,即 GM(1,1) 模型组合优化方法较多,未来将进一步研究 GM(1,1) 模型组合优化,从而得到精度更高的组合优化方法。

参考文献

- [1] HU Liqiang, HE Chaofeng, CAI Zhaoquan, et al. Track circuit fault prediction method based on grey theory and expert system [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2018, 12(3): 12-23.
- [2] MEMON M S, LEE Y H, MARI S I. Group multi-criteria supplier selection using combined grey systems theory and uncertainty theory [J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(21): 7951-7959.
- [3] WANG Xingqi, QI Lei, CHEN Chan, et al. Grey system theory based prediction for topic trend on Internet [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2014, 29: 191-200.
- [4] 陈涛捷. 灰色预测模型的一种拓广 [J]. 系统工程, 1990, 8(4): 50-52.
- [5] 于德江. 灰色系统建模方法的探讨 [J]. 系统工程, 1991, 9(5): 9-12.
- [6] 李群. 灰色预测模型的进一步拓广 [J]. 系统工程理论与实践, 1993, 13(1): 64-66.
- [7] 李希灿. 灰色系统 GM(1,1) 模型适用范围拓广 [J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(1): 97-101.
- [8] 何斌, 蒙清. 灰色预测模型拓广方法研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(9): 137-140.
- [9] 李翠凤, 戴文战. 基于函数 $\cot x$ 变换的灰色建模方法 [J]. 系统工程, 2005, 23(3): 110-114.
- [10] 李晔, 卢珊, 董奋义. 基于反余弦函数变换的灰色预测模型研究 [J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(11): 251-254.
- [11] 林丽君, 王宏楠. 灰色预测模型进一步拓广方法的研究 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2008, 21(4): 480-482.
- [12] 刘秀峰, 张彼德, 邹江平, 等. 基于函数 $\cos(x^a)$ 变换的灰色模型及其在变压器油中气体浓度预测的应用 [J]. 西华大学学报(自然科学版), 2013, 32(2): 80-83.
- [13] 关叶青, 刘思峰. 基于函数 $\cot(x^T)$ 变换的灰色 GM(1,1) 建模方法 [J]. 系统工程, 2008, 6(9): 89-93.
- [14] 别芳宇, 陈为真. 基于函数 $\arccos(px + q)$ 变换的灰色预测模型研究 [J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(7): 262-265.
- [15] 林耀进, 王晨曦. 基于指数三角函数的灰色预测模型研究与应用 [J]. 漳州师范学院学报, 2009, 33(2): 32-36.
- [16] 包旭, 张山华, 陈锦文, 等. 基于智能函数组合优化的 GM(1,1) 模型 [J]. 统计与决策, 2020, 36(10): 45-50.
- [17] 许泽东, 柳福祥. 灰色 GM(1,1) 模型优化研究进展综述 [J]. 计算机科学, 2016, 43(S2): 6-10.
- [18] 何文章, 宋国乡. 基于遗传算法估计灰色模型中的参数 [J]. 系统工程学报, 2005, 20(4): 432-436.
- [19] 尹红健. 改进的 GM(1,1) 模型及其应用 [J]. 现代计算机, 2009, 6(12): 72-74.
- [20] 王健. 一类改进的灰色预测模型及其应用 [J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(9): 181-183.
- [21] 胡大红. 基于背景值与初始条件优化的非等间距 GM(1,1) 模型 [J]. 湖北文理学院学报, 2016, 37(11): 20-22.
- [22] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [23] 周世健, 赖志坤, 藏德彦, 等. 加权灰色预测模型及其计算实现 [J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2002, 27(5): 451-455.
- [24] MA Weimin, ZHU Xiaoxi, WANG Miaomiao. Forecasting iron ore import and consumption of China using grey model optimized by particle swarm optimization algorithm [J]. Resources Policy, 2013, 38(4): 613-620.
- [25] WANG Zhengxin, LI Qin. Modelling the nonlinear relationship between CO₂ emissions and economic growth using a PSO algorithm-based grey Verhulst model [J]. Journal of Cleaner Production, 2019, 207: 214-224.